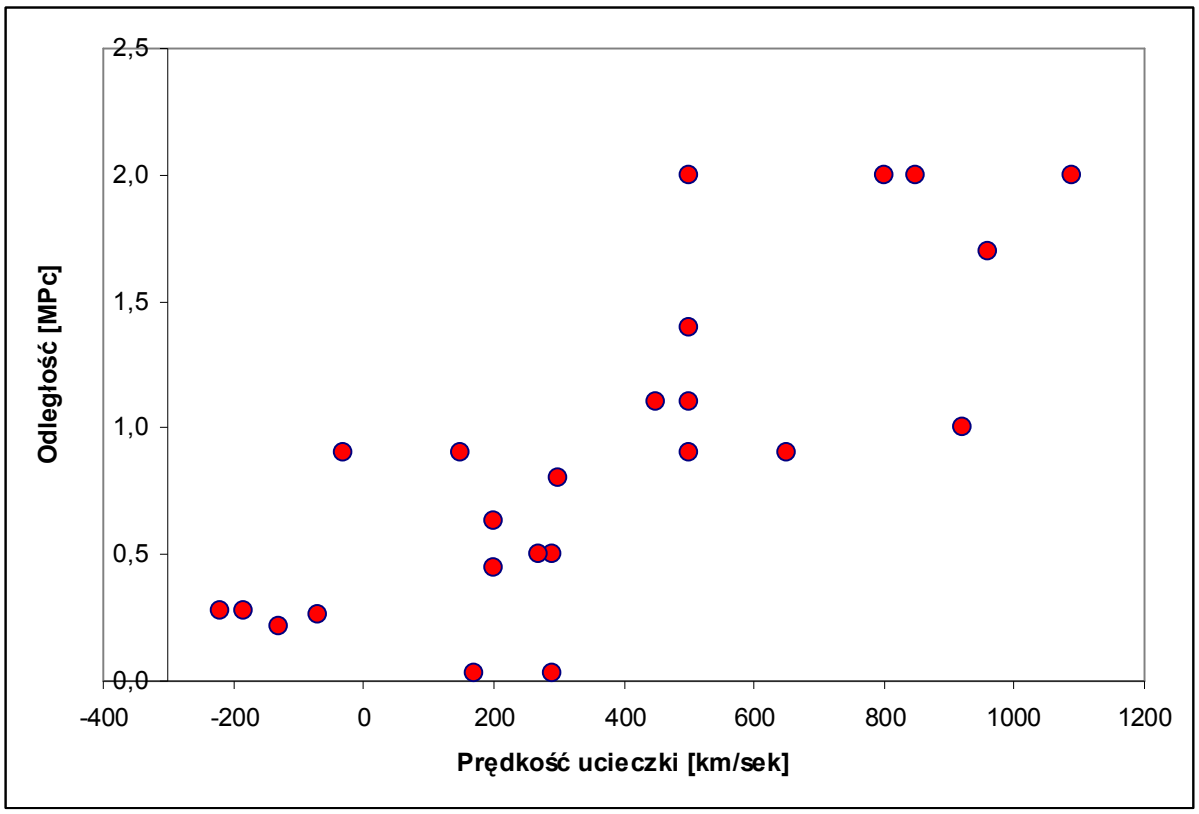
Regresja liniowa

x	170	290	-130	-70	-185	-220	200	290	270	200	300	-30
y	0,03	0,03	0,21	0,26	0,28	0,28	0,45	0,50	0,50	0,63	0,80	0,90

*

x	650	150	500	920	450	500	500	960	500	850	800	1090
y	0,90	0,90	0,90	1,00	1,10	1,10	1,40	1,70	2,00	2,00	2,00	2,00

Tab. 1 Dane Hubble'a o prędkości ucieczki gromad znajdujących się poza Drogą Mleczną. *x* – prędkość ucieczki [km/sek], *y* – odległość[1] [Mpc[2]]. Źródło: Hubble, E., *A Relatiom Between Distance and Radial Velocity Among Extra-galactic Nebulae,* Proc. Nat. Acad. of Science, 15 (1929).



Rys. 1 Dane Hubble'a

Przybliżony model fizyczny:
[Rysunek na tablicy]

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{y}{2}}{vT} = \frac{\frac{x}{2}t}{vt}, \quad y = Tx$$

Tu: y – odległość mgławicy od Ziemi, v – prędkość oddalania się ciał niebieskich na skutek Wielkiego Wybuchu, T – czas od wielkiego wybuchu[3], x – prędkość ucieczki galaktyki od Ziemi, t – czas obserwacji.

[1] Odległości, wyznaczane na podstawie jasności gromad, miały bardzo duży błąd pomiarowy.
[2] Mpc – megaparsek= 3,086 10^{19}km. 1 parsek - odległość obiektu od Ziemi o kącie **par**alaksy równym 1 **sek**
[3] Wartość H_0=1/T gdy [y]=Mpc, [x]=km/sek nazywa się stałą Hubble'a. Dane z 2010 oparte o pomiar soczewkowania grawitacyjnego z wykorzystaniem Teleskopu Kosmicznego Hubble'a dało wartość H_0 = 72.6 ± 3.1 (km/s)/Mpc

Model regresji:

$$y(x) = \mu(y|x) + \varepsilon \text{, gdzie}$$

x – parametr, $\mu(y|x)$ - wartość oczekiwana y dla zadanego x ε - błąd losowy o rozkładzie $N(0,\sigma^2)$.

Próbka: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$. Zakładamy, że $y_1,y_2,\ldots,y_n$ są niezależne.

Rozważamy trzy modele :

$M_0 : \mu(y|x) = \mu_0$, $M_1 : \mu(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$, $M_2 : \mu(y|x) = \beta_1 x$

x	y	M_0		M_1		M_2	
170	0,03	0,91	0,77	0,63	0,36	0,33	0,09
290	0,03	0,91	0,77	0,80	0,58	0,56	0,27
-130	0,21	0,91	0,49	0,22	0,00	-0,25	0,22
-70	0,26	0,91	0,42	0,30	0,00	-0,13	0,16
-185	0,28	0,91	0,40	0,15	0,02	-0,36	0,40
-220	0,28	0,91	0,40	0,10	0,03	-0,42	0,49
200	0,45	0,91	0,21	0,67	0,05	0,38	0,00
290	0,50	0,91	0,17	0,80	0,09	0,56	0,00
270	0,50	0,91	0,17	0,77	0,07	0,52	0,00
200	0,63	0,91	0,08	0,67	0,00	0,38	0,06
300	0,80	0,91	0,01	0,81	0,00	0,58	0,05
-30	0,90	0,91	0,00	0,36	0,29	-0,06	0,92
650	0,90	0,91	0,00	1,29	0,15	1,25	0,12
150	0,90	0,91	0,00	0,61	0,09	0,29	0,37
500	0,90	0,91	0,00	1,09	0,03	0,96	0,00
920	1,00	0,91	0,01	1,66	0,44	1,77	0,59
450	1,10	0,91	0,04	1,02	0,01	0,86	0,06
500	1,10	0,91	0,04	1,09	0,00	0,96	0,02
500	1,40	0,91	0,24	1,09	0,10	0,96	0,19
960	1,70	0,91	0,62	1,72	0,00	1,84	0,02
500	2,00	0,91	1,19	1,09	0,84	0,96	1,08
850	2,00	0,91	1,19	1,57	0,19	1,63	0,13
800	2,00	0,91	1,19	1,50	0,25	1,54	0,21
1090	2,00	0,91	1,19	1,90	0,01	2,09	0,01
średnia	**0,91**	**SS**	**9,5833**	**SS**	**3,6078**	**SS**	**5,4689**

Tab. 2 Modele M_i z dopasowanymi metodą najmniejszych kwadratów

	Współczynniki	*Błąd standardowy*	*t Stat*	*Wartość-p*	*Dolne 95%*	*Górne 95%*
Przecięcie	0,3991	0,1185	3,37	0,003	0,15	0,64
x	0,001373	0,000227	6,04	0,000004	0,000901	0,001845

Tab. 3 Model M_1

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Istotność F*
Regresja	1	5,9755	5,98	36,44	4,48E-06
Resztkowy	22	3,6078	0,16		
Razem	23	9,5833			

Tab. 4 ANOVA dla modelu M_1. R^2=0,62

	Współczynniki	Błąd standardowy	t Stat	Wartość-p	Dolne 95%	Górne 95%
x	0,00192	0,00019	10,05684	0,00000	0,00153	0,00232

Tab. 5 Model M_2. H_0=520,3 (km/s)/Mpc

	df	SS	MS	F	Istotność F
Regresja	1	4,114388	4,11	17,30	0,0004
Resztkowy	23	5,468902	0,24		
Razem	24	9,58329			

Tab. 6 ANOVA dla modelu M_1. R^2=0,43

Czas od wielkiego wybuchu

$$0{,}00019\frac{Mpc}{\frac{km}{sek}} = 0{,}00019 * 3{,}086 * 10^{19}\, sek = 5{,}92 * 10^{16}\, sek = \frac{5{,}92 * 10^{16}}{3600 * 24 * 365{,}25} lat = 1{,}9\, mld\ lat$$ [4]

[4] Wg ostatnich danych 13,5 mld lat